Algunas consideraciones sobre la métrica p-ádica

David Peña Peralta

Universidad de Sonora - Campus Hermosillo

Blvd. Luis Encinas J, Calle Av. Rosales, Centro, 83000 Hermosillo, Son.

1. Introducción

Definimos los números p-ádicos como series formales, que generalizan la representación p-ádica de un número positivo, es decir la representación base p

Sea x un entero positivo, y p un número primo, definimos la representación p-ádica de una manera similar a la base decimal.

$$x = a_0 \cdot p^0 + a_1 \cdot p^2 + ... + a_n \cdot p^n$$

Definimos a los números p-ádicos como series infinitas de potencias base p.

En este cartel se presentarán las propiedades básicas relativas a su métrica.

1.1 El Anillo $\mathbb{Z}_p$ y el campo $\mathbb{Q}_p$

Denotamos por $\mathbb{Z}_p$ al conjunto

$$\{x = a_0 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2 + ... | a_i \in \{0, 1, ..., p-1\}, \forall i \geq 0\}$$

y definimos una suma y un producto como extensión natural de la suma y el producto de enteros positivos expresados en base p.

Ejemplos

$$\begin{aligned} x =& 1 + p + p^2 + ... \\ y =& 1 + p + p^2 + ... \\ x + y =& 2 + 2p + 2p^2 + ... \\ xy =& (1 + p + p^2 + ...)(1 + p + p^2 + ...) \\ =& (1 + p + p^2 + ...) + p(1 + p + p^2 + ...) + p^2(1 + p + p^2 + ...) + ... \end{aligned}$$

Observemos que

$$-1 = (p-1) + (p-1)p + (p-1)p^2 + ...$$

Ya que

$$\begin{aligned} -1 + 1 =& 1 + (p-1) + (p-1)p + (p-1)p^2 + ... \\ 0 =& 0 + [p + (p-1)p] + (p-1)p^2 + ... \\ =& 0 + 0p + [p^2 + (p-1)p^2] + ... \end{aligned}$$

En particular

$$\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}_p$$

Además, podemos definir su campo de fracciones, y lo denotaremos por $\mathbb{Q}_p$.

$$\mathbb{Q}_p = \left\{ \frac{x}{y} \middle| x, y \in \mathbb{Z}_p, y \neq 0 \right\}$$

2. Métrica en $\mathbb{Q}_p$

Para definir una métrica en $\mathbb{Q}_p$ usaremos la noción de valuación p-ádica

2.0.1. Valuación P-ádica

Si $x = a_0 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2 + ...$ Se define

$$V_p(x) := \min\{i | a_i \neq 0\}$$

Y expandiremos a $\mathbb{Q}_p$ mediante

$$V_p\left(\frac{x}{y}\right) = V_p(x) - V_p(y)$$

$$V_p(0) = \infty$$

2.0.2. Distancia

Sea $\alpha \in (0, 1)$,–Tipicamente usamos $\frac{1}{p}$–
Definimos el valor absoluto p-ádico.

$|x|_p := \alpha^{V_p(x)}$, para $x \neq 0,\ |0|_p = 0$

2.1 Ejemplos

Con $\alpha = \frac{1}{p}$

$$\begin{aligned} |1|_p =& \alpha^{V_p(1)=0} = \alpha^0 = 1 \\ |p|_p =& \alpha^{V_p(p)=1} = \alpha^1 = \frac{1}{p} \\ \left|\frac{1}{p}\right|_p =& \alpha^{V_p(1/p)=-1} = \alpha^{-1} = p \end{aligned}$$

Definido el valor absoluto en $\mathbb{Z}_p$, procedemos a mencionar la distancia en $\mathbb{Z}_p$, que está dada de igual manera que en $\mathbb{Z}$.

$$d(x, y) = |x - y|_p$$

Una de las propiedades más importantes que posee este valor absoluto es la "desigualdad fuerte del triángulo"

$$|x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}$$

Demostración
Es fácil demostrar que $V_p(a + b) \geq \min\{V_p(a), V_p(b)\}$. Entonces con $\alpha \in (0, 1)$

$$|a + b|_p = \alpha^{V_p(a+b)} \leq \alpha^{\min\{V_p(a), V_p(b)\}}$$

Pero

$$\begin{aligned} \alpha^{\min\{V_p(a), V_p(b)\}} &= \max\{\alpha^{V_p(a)}, \alpha^{V_p(b)}\} \\ &= \max\{|a|_p, |b|_p\} \end{aligned}$$

Por lo que

$$|a + b|_p \leq \max\{|a|_p, |b|_p\}$$

■

3. Triángulos

Una de las propiedades sorprendentes de la métrica en $\mathbb{Q}_p$ es:

Teorema 3.1
Todos los triangulos son isósceles
Formalmente
Dados $x, y, z \in \mathbb{Q}_p$, distintos, entonces forzosamente una de las 3 se cumple.

- $d(x, y) = d(x, z)$
- $d(y, z) = d(y, x)$
- $d(z, x) = d(z, y)$

Demostración
Si una de las anteriores se cumple, terminamos, si no:
Supóngase sin pérdida de generalidad que

$$d(x, y) < d(x, z) < d(y, z)$$

Luego

$$|y - z|_p \leq \max\{|y - x|_p, |x - z|_p\}$$

Entonces como $d(x, y) < d(x, z)$

$$|y - z|_p \leq |x - z|_p$$

Lo cual nos lleva a una contradicción.

■

4. Bolas

Sea x un punto y $r > 0$. Se define Bola Abierta:

$$B_{<r}(x) = \{y : d(x, y) < r\}$$

Se define Bola Cerrada:

$$B_{\leq r}(x) = \{y : d(x, y) \leq r\}$$

Las bolas definidas anteriormente también tienen propiedades sorprendentes.

4.1 Propiedades

Teorema 4.1.1
Cualquier punto de la bola es centro. Es decir: Sea $y \in B_{<r}(x)$ un punto arbitrario. Entonces,

$$B_{<r}(x) = B_{<r}(y)$$

Demostración
Dado $y \in B_{<r}(x)$ debemos probar que

$$B_{<r}(y) \subset B_{<r}(x)$$

Sea $z \in B_{<r}(y)$ entonces $d(y, z) < r$, entonces

$$\begin{aligned} |x - z|_p &\leq \max\{|x - y|_p, |y - z|_p\} \\ |x - y|_p &< r \\ |y - z|_p &< r \end{aligned}$$

Por tanto

$$|x - z|_p < r$$

Seguido, debemos probar

$$B_{<r}(x) \subset B_{<r}(y)$$

Sea ahora $z \in B_{<r}(x)$ tenemos que $|x - z|_p < r$.

$$\begin{aligned} |z - y|_p &\leq \max\{|z - x|_p, |x - y|_p\} \\ |z - x|_p &< r \\ |x - y|_p &< r \end{aligned}$$

Por tanto

$$|z - y|_p < r$$

Verificando que $B_{<r}(x) = B_{<r}(y)$

■

Teorema 4.1.2
Sean $B_r(x)$ y $B_{r'}(y)$ bolas abiertas tales que

$$B_r(x) \cap B_{r'}(y) \neq \emptyset$$

Entonces una de las bolas está contenida en la otra.

Demostración
Sea

$$z \in B_r(x) \cap B_{r'}(y)$$

con $r < r'$. Tomemos $u \in B_{<r}(x) = B_{<r}(z)$. Entonces

$$\begin{aligned} |y - u|_p &\leq \max\{|y - z|_p, |z - u|_p\} \\ |y - z|_p &< r' \\ |z - u|_p &< r \\ r &< r' \end{aligned}$$

Entonces

$$|y - u|_p < r'$$

Probando que $u \in B_{<r'}(y)$

■

Teorema 4.1.3
Las bolas abiertas son conjuntos cerrados y viceversa

Demostración
Sea $B_{<r}(x)$ una bola abierta arbitraria con $r > 0$ y t un punto de acumulación de $B_{<r}(x)$.
Entonces para $r' < r$

$$B_{<r'}(t) \cap B_{<r}(x) \neq \emptyset$$

Entonces

$$B_{<r'}(t) \subset B_{<r}(x)$$

En particular $t \in B_{<r}(x)$.
Esto prueba que la bola abierta es un conjunto cerrado.
En el caso de las bolas cerradas. Sea $y \in B_{\leq r}(x)$. Sabemos que $B_{\leq r}(y) = B_{\leq r}(x)$, y $B_{<r}(y) \subset B_{\leq r}(y) = B_{\leq r}(x)$ Esto prueba que $B_{\leq r}(x)$ es un conjunto abierto.

■

4.2 Las Bolas y los $\mathbb{Z}_p$

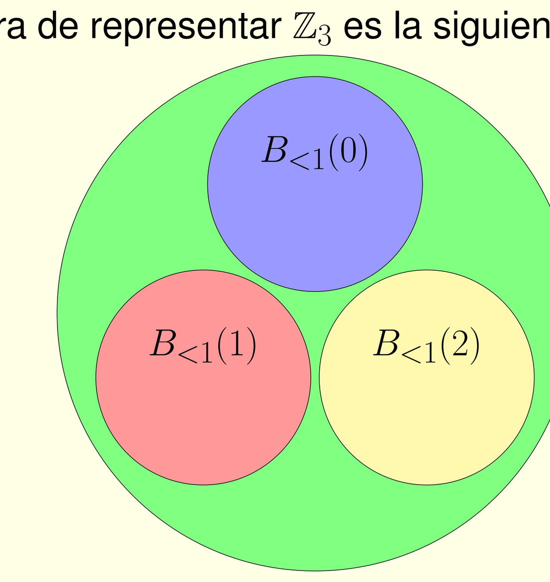
Para entender una representación gráfica de $\mathbb{Z}_p$ Observemos que

$$\mathbb{Z}_p = B_{\leq 1}(0) = \bigcup_{i=0}^{p-1} B_{<1}(i)$$

Lo cual nos permite hacer la sig. representación gráfica. Sea $p = 3$, entonces

$$\mathbb{Z}_3 = B_{<1}(0) \cup B_{<1}(1) \cup B_{<1}(2)$$

Y una manera de representar $\mathbb{Z}_3$ es la siguiente.



Además, tomando a $B_{<1}(0)$ podemos encontrar bolas contenidas en él.

$$\begin{aligned} B_{<1}(0) =& B_{\leq\frac{1}{p}}(0) = \bigcup_{i=0}^{p-1} B_{<\frac{1}{p}}(ip) \\ B_{<\frac{1}{p}}(0) =& B_{\leq\frac{1}{p^2}}(0) = \bigcup_{i=0}^{p-1} B_{<\frac{1}{p^2}}(ip^2) \\ &\vdots \\ B_{<\frac{1}{p^n}}(0) =& B_{\leq\frac{1}{p^{n+1}}}(0) = \bigcup_{i=0}^{p-1} B_{<\frac{1}{p^{n+1}}}(ip^{n+1}) \end{aligned}$$

Entonces con $p = 3$, dividiendo la bola $B_{<1}(0)$

$$B_{<1}(0) \equiv B_{\leq\frac{1}{3}}(0) \begin{cases} B_{<\frac{1}{3}}(0) \\ B_{<\frac{1}{3}}(3) \\ B_{<\frac{1}{3}}(6) \end{cases}$$

Podemos concluir que la representación geométrica de $\mathbb{Z}_3$, y en general $\mathbb{Z}_p$ está basado sobre un esquema recursivo.

Referencias

[1] Hernandez, Genaro, *Introduccion a los Números P-ádicos: Notas de Curso* Semana Nacional de Investigacion y Docencia, (2019)

[2] Robert, Alain M, *A course in a p-adic Analysis*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 198. Springer-Verlag, New York (2000).

Este cartel fue supervisado por el Dr. Genaro Hernández Mada